Лекция 9 «Подобие и преобразование уравнений Навье-Стокса. Основные критерии гидродинамического подобия»

Цель: Проведите преобразование движения реальной жидкости Навье-Стокса. Выведите основные критерии гидродинамического подобия. Приведите физический смысл каждого из полученных критериев гидродинамического подобия.

Краткий конспект лекции: Гидродинамическое подобие. В соответствии с общим положением о подобии процессов движение жидкостей в двух трубопроводах будет подобно в том случае, если в подобных потоках будут постоянны отношения действующих в них сил.

В потоке жидкости каждая частица находится под воздействием сил давления, тяжести и трения. Кроме того, в движущейся жидкости возникает сила инерции, равная по величине, но обратная по знаку равнодействующей сил давления, тяжести и трения. Сила инерции определяется как произведение массы частицы на ускорение. Постоянное отношение каждой из действующих сил к силе инерции (или обратное отношение, которое используется вместо прямого отношения сил инерции, чтобы не иметь дела с дробными величинами) характеризуется критериями подобия. Критерии гидродинамического подобия можно получить из дифференциального уравнения движения реальной жидкости Навье-Стокса.

Напишем уравнение Навье-Стокса для реальной несжимаемой жидкости одномерного установившегося движения (для оси z):

$$-g\rho - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial w_z}{\partial \tau}. \tag{1}$$

Разделим все слагаемые уравнения (1) на правую его часть

$$-\frac{g\rho\partial\tau}{\rho\partial w_z} - \frac{\partial p\partial\tau}{\partial z\rho\partial w_z} + \mu\frac{\partial^2 w_z\partial\tau}{\partial z^2\rho\partial w_z} = 1. \tag{2}$$

Выполняя подобное преобразование уравнения (2), умножим каждый из его элементов на соответствующие константы подобия, причем множители как постоянные величины выносим за знак дифференциала:

$$\frac{C_g C_\rho C_\tau}{C_p C_w}\left(-\frac{g\rho\partial\tau}{\rho\partial w_z}\right) + \frac{C_p C_\tau}{C_z C_\rho C_w}\left(-\frac{\partial p\partial\tau}{\partial z\rho\partial w_z}\right) + \frac{C_\mu C_w C\tau}{C_{z^2} C_\rho C_w}\left(\frac{\mu\partial^2 w_z\partial\tau}{\partial z^2\rho\partial w_z}\right). \tag{3}$$

Сопоставляя уравнения (2) и (3), получим безразмерные комплексы, составленные из констант подобия, которые носят название индикаторов подобия (при этом одноименные множители сокращаются). Для членов уравнения (3), учитывающих влияние сил тяжести и объемных сил, будем иметь:

$$\frac{C_g C_\tau}{C_w} = 1. \qquad (4)$$

Заменяя $C_\tau = \dfrac{C_l}{C_w}$ получим:

$$\frac{C_g C_l}{C_{w^2}} = 1. \qquad (5)$$

Для членов уравнения (3), учитывающих влияние сил давления:

$$\frac{C_p C_\tau}{C_z C_\rho C_w} = 1$$

или

$$\frac{C_p}{C_\rho C_{w^2}} = 1. \qquad (6)$$

Для членов уравнения (3), учитывающих влияние сил внутреннего трения:

$$\frac{C_\mu C_\tau}{C_{z^2} C_\rho} = 1$$

или

$$\frac{C_\mu}{C_l C_\rho C_w} = 1. \qquad (7)$$

В индикаторах подобия (5-7), вместо масштабных множителей подставив соответствующие отношения физических величин

$$C_w = \frac{w_1}{w}; C_l = \frac{l_1}{l}; C_\rho = \frac{\rho_1}{\rho}; C_p = \frac{p_1}{p}; C_\mu = \frac{\mu_1}{\mu}; C_g = \frac{g_1}{g}. \qquad (8)$$

(физические величины в знаминателе относятся к данной системе, а в числителе к подобной), получим безразмерные комплексы или критерии подобия.

1. Критерий Фруда *Fr* представляет собой отношение сил тяжести к силам инерции и получается из индикатора подобия (5), откуда

$$\frac{C_g C_l}{C_{w^2}} = \frac{\dfrac{g_1}{g} \cdot \dfrac{l_1}{l}}{\dfrac{w_1^2}{w^2}} = 1, \qquad (9)$$

$$\frac{g_1 l_1}{w_1^2} = \frac{gl}{w^2} = idem \qquad (10)$$

или

$$\frac{gl}{w^2} = Fr. \qquad (11)$$

Чтобы избежать дробных величин, обычно пользуются обратным выражением:

$$\frac{w^2}{gl} = Fr. \qquad (12)$$

2. Критерий Эйлера *Eu* представляет собой отношение сил давления к инерционным силам, получается из индикатора подобия (6):

$$\frac{C_p}{C_\rho C_{w^2}} = \frac{\frac{p_1}{p}}{\frac{\rho_1}{\rho} \cdot \frac{w_1^2}{w^2}} = 1, \qquad (13)$$

откуда

$$\frac{p_1}{w_1^2 \rho_1} = \frac{p}{w^2 \rho} = idem \qquad (14)$$

или

$$\frac{p}{\rho w^2} = Eu. \qquad (15)$$

Поскольку для теории подобия важны не абсолютные значения, а относительные, вместо величины абсолютного давления вводят разность давлений в каких-нибудь двух точках, и критерий Эйлера принимает вид:

$$\frac{\Delta p}{\rho w^2} = Eu. \qquad (16)$$

3. Критерий Рейнольдса *Re* представляет собой отношение сил трения к силам инерции и определяет режим движения жидкости. Получается он из индикатора подобия (7):

$$\frac{C_\mu}{C_l C_\rho C_w} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu}}{\frac{l_1}{l} \cdot \frac{\rho_1}{\rho} \cdot \frac{w_1}{w}} = 1, \qquad (17)$$

откуда

$$\frac{\mu_1}{\rho_1 l_1 w_1} = \frac{\mu}{\rho l w} = idem \qquad (18)$$

и

$$\frac{\mu}{\rho l w} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \tag{19}$$

или

$$\frac{l \rho w}{\mu} = \mathrm{Re}. \tag{20}$$

Если рассматривать неустановившееся движение, то анологичным образом, как и для выведенных критериев гидродинамического подобия, получают критерий гомохронности *Ho*, учитывающий неустановившееся движение жидкости:

$$\frac{w\tau}{l} = Ho, \tag{21}$$

где τ – время; w – скорость; l – определяющий линейный размер.

Таким образом, уравнение Навье-Стокса, описывающее в общей форме процесс движения жидкости, в результате подобного преобразования могут быть представлены в виде функции от критериев подобия:

$$f\left(Ho, Fr, Eu, \mathrm{Re}\right) = 0. \tag{22}$$

Для установившегося движения, где *Ho* исключается:

$$f\left(Fr, Eu, \mathrm{Re}\right) = 0. \tag{23}$$

Для вынужденного движения жидкости влияние сил тяжести ничтожно мало, и равенством критериев Фруда в этом случае можно пренебречь. Тогда зависимость между критериями подобия в общей форме выразится функцией:

$$Eu = f\left(\mathrm{Re}, \frac{l}{d}\right), \tag{24}$$

где $\frac{l}{d}$ – отношение линейных размеров, характеризующее геометрическое подобие.

Критерий Эйлера является неопределяющим, поскольку при равенстве критериев Фруда и Рейнольдса получается сам собой, так как перепад давления является следствием распределения скоростей в потоке.

Вид функции (24) представляется в степенной форме:

$$Eu = A\mathrm{Re}^m \left(\frac{l}{d}\right)^n. \tag{25}$$

Значение постоянной *A* и показателей степени *m*, *n* определяются экспериментально.

Основные критерии гидродинамического подобия Re и Fr иногда заменяют более сложными критериями Галилея Ga и Архимеда Ar, полученными сочетанием основных критериев:

критерий Галилея

$$Ga = \frac{\mathrm{Re}^2}{Fr} = \frac{gl^3\rho^2}{\mu^2} = \frac{gl^3}{\nu^2}, \tag{26}$$

критерий Архимеда

$$Ar = Ga\frac{\rho_1 - \rho}{\rho} = \frac{gl^3}{\nu^2}\cdot\frac{\rho_1 - \rho}{\rho} = \frac{gl^3\rho(\rho_1 - \rho)}{\mu^2}, \tag{27}$$

где ρ_1 и ρ – плотность жидкости в двух различных точках.

Критерием Ga удобно пользоваться в тех случаях, когда трудно определить скорость потока (в Ga скорость исключена).

Критерий Ar характеризует подобие при движении жидкости вследствие разных плотностей в различных точках потока, т.е. в условиях естественной конвекции [1-3].

Вопросы для самоконтроля:

1. Проведите преобразование движения реальной жидкости Навье-Стокса.
2. Выведите основные критерии гидродинамического подобия.
3. Приведите физический смысл каждого из полученных критериев гидродинамического подобия.

Литература

1. Лекции по курсу «Основные процессы и аппараты химической технологии»: учебно-методическое пособие / составители: Ж.Т. Ешова, Д.Н. Акбаева. – Алматы: Қазақ университеті, 2017. – 392 с.
2. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. – М.: Химия, 1973. – 752 с.
3. Романков П.Г., Фролов В.Ф., Флисюк О.М. Методы расчёта процессов и аппаратов химической технологии (примеры и задачи). – Санкт-Петербург: ХИМИЗДАТ, 2009. – 544 с.